対数的デルペッツォ曲面の分数的指数について (Fano多様体の最近の進展)

AUTHOR(S):

藤田, 健人

数理解析研究所講究録
第 1897 巻 2014 年 1-20

対数的デルペッツォ曲面の分数的指数について
On the fractional indices for log del Pezzo surfaces

藤田健人*(京都大学数理解析研究所)

Kento Fujita (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University)

概要

本稿では, 対数的デルペッツォ曲面について (特に分数的指数に着目した分類を主眼に置いて) 論じる. まず 1 章にて基本的な定義と対数的デルペッツォ曲面の分類の基本作戦を述べ, 2 章にてその詳細を述べる. 3 章では特に分数的指数が大きいときを論じる. 最後に 4 章にて, 個人的に興味深い例をいくつか述べる.

目次

1 定義及び作戦の概説 2
1.1 対数的デルペッツォ曲面 2
1.2 分類にむけて 3
1.3 「分かりやすい」双有理射 5

2 基礎対・基礎多重組 6
2.1 (a,b)-基礎対 6
2.2 (a,b)-基礎多重組 8
2.3 長所・短所 11

3 分数的指数が 1/2 以上のとき 12

4 例・予想 14
4.1 $S=\mathbb{P}(1,2,5)$ のとき 14
4.2 直線の存在しない例 16
4.3 $r(S)$ と $i(S)$ との関係 17

* fujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

1　定義及び作戦の概説

基礎体は標数任意の代数閉体 $\Bbbk$ とする. また, 極小モデル理論の用語は [KM98] に従って用いる.

1.1　対数的デルペッツォ曲面

対数的デルペッツォ曲面とそれに関するいくつかの不変量を定義する. 正規射影代数曲面 S が**対数的デルペッツォ曲面 (log del Pezzo surface)** であるとは, S が高々ログ端末 (log-terminal) 特異点しか持たず, かつ反標準因子 $-K_S$ が豊富な ($\mathbb{Q}$-カルティエ) 因子であるということとする. (もし基礎体 $\Bbbk$ が複素数体 $\mathbb{C}$ のときは, 正規代数曲面が高々ログ端末特異点しか持たないというのは「高々商特異点しか持たない」ということと同値である事に注意する.) 対数的デルペッツォ曲面は有理曲面であることはよく知られている (例えば [Nak07]). 以下, 対数的デルペッツォ曲面 S に対し, S の**分数的指数 (fractional index)** $r(S)$ 及び, **$\mathbb{Q}$-ゴレンシュタイン指数 ($\mathbb{Q}$-Gorenstein index)** [*1] $i(S)$ を, それぞれ以下で定める:

$$r(S) := \max\{r \in \mathbb{Q}_{>0} \mid -K_S \sim_{\mathbb{Q}} rL \ (^{\exists}L: \text{カルティエ因子 on } S)\},$$
$$i(S) := \min\{a \in \mathbb{Z}_{>0} \mid -aK_S \text{ がカルティエ因子 }\}.$$

事実 1.1. S を対数的デルペッツォ曲面とする.

(1) [Fjt75] もし $r(S) > 1$ なら, S は以下のいずれかと同型: $\mathbb{P}^2$ ($r(\mathbb{P}^2) = 3$), $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ($r(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 2$), $\mathbb{P}(1,1,d)$ ($d \geq 2$) ($r(\mathbb{P}(1,1,d)) = 1 + 2/d$). ここで, $\mathbb{P}(1,1,d)$ は重み $(1,1,d)$ の重み付き射影平面.

(2) もし $r(S) = 1$ なら $i(S) = 1$ となる[*2]. このような S は, [Bre80, Dem80, HW81] で分類されている.

(3) $i(S) = 2$ なる S は, $\Bbbk = \mathbb{C}$ のときは [AN88, AN89, AN06] にて, そして任意の $\Bbbk$ に対しては [Nak07] にて分類されている[*3].

(4) $i(S) = 3$ かつ $r(S) = 2/3$ なる S は, $\Bbbk = \mathbb{C}$ のときは [OT12] にて分類されている[*4].

更に, 2 次元**ファノ帯域 (Fano spectrum)** を, 以下で定める:

$$\mathrm{FS}_2 := \{r(S) \mid S: \text{対数的デルペッツォ曲面}\}.$$

[*1] [FY14] や [Fjt14b] では, 単に**指数 (index)** と呼んでいる.

[*2] [Fjt14a, Proposition 3.5 (2)] による. これは自明ではない. 注意 1.2 を見て頂きたい.

[*3] 両者の分類の作戦は全く異なる.

[*4] 分類の作戦は [AN88, AN89, AN06] と似ている.

2 次元ファノ帯域 FS_2 は, ACC, 即ち昇鎖列条件 (ascending chain condition) を満たし, 更にその集積点 (accumulation point) の集合が $\{0\} \cup \{1/k \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ と一致することが [Ale88] によって知られている. 事実 1.1 (1) より, $FS_2 \cap (1, \infty) = \{1 + 2/d \mid d \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ は分かっている. (更に, 2 次元ファノ帯域の高次元版も [Ale91] や [HMX12, Corollary 1.10] にて考察されている.)

1.2 分類にむけて

ここでは, 固定された自然数 $c \geq 2$ に対して, $1/c \leq r(S) < 1$ なる対数的デルペッツォ曲面 S の同型類を全て特定したい, という観点で話を進める[*5]. まず, そのような S に対し, 自然数 a, b 及び S 上の (豊富な) カルティエ因子 L_S が存在し, $r(S) = b/a$ かつ $-aK_S \sim bL_S$ が成立する. この (a, b) のことを S の**多重指数 (multi-index)** と呼び, かつこの L_S を S の**基本カルティエ因子 (fundamental Cartier divisor)** という. 今の場合は仮定していなかったが, $a = i(S)$ ととることができることにも注意する. $a = i(S)$ のとき, 多重指数 (a, b) は**正規化されている (normalized)** と言おう.

注意 1.2. ここで, 仮に (a, b) が S の正規化された多重指数だったとしても, $\gcd(a, b) = 1$ とは限らない. 実際例えば, $r(S) = 1/2$ かつ, 正規化された多重指数が $(2, 1)$ ではない S が存在することが [Fjt14a, Corollary 4.4 (1)] にて分かっている. 例 4.4 も見て頂きたい.

以下, 多重指数 (a, b) の対数的デルペッツォ曲面 S を如何にして理解するかのあらすじを, (詳しくは 2 章にて述べるとして) まずは大雑把に述べる. この作戦は, 基本的に [Nak07] の作戦に基づいていて, 更には [Fjt14a], [FY14] 及び [Fjt14b] の作戦を「組み合わせた」ようなものになっている.

Step 1. S の極小特異点解消を $\alpha\colon M \to S$ と書こう. 「S を理解する」にあたり, この「M 及び射 α を与える線形系の組を理解する」という発想に至るのは自然なことだと思う. ここで, 「α を与える線形系」を考えるということは, 大体「S 上の豊富因子 $-aK_S$ の α での引き戻し」を考えることと同じようなことであることに注意しよう. なので, 『M と $E_M := -aK_{M/S}$ の組を考えることに帰着できる』という発想に至る. ここで, $K_{M/S}$ とは, α-例外な M 上の $\mathbb{Q}$-因子 $K_M - \alpha^* K_S$ のことである. こうして得られる組 (M, E_M) のことを「(a, b)-基礎対」と呼ぶ (詳しくは, 2.1 章を見て頂きたい).

Step 2. では, どのようにして (a, b)-基礎対 (M, E_M) を特定すればよいのだろうか? この M は非特異射影有理代数曲面であるので, (-1)-曲線を潰していくことで, 双有理射 $M \to X$ であって X は $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$, となるようなものが取れる. (ここで $\mathbb{F}_n$ は, $(-n)$-曲線をもつヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ のことである.) なので, この

[*5] ただ, 以下の作戦は汎用性が高く, 上の仮定とは異なる様々な「特別な対数的デルペッツォ曲面」を調べ上げるのに役立つ作戦だろうと期待している. 2.3 章も見て頂きたい.

X と E_M の像 E_X の組 (X, E_X) で, M に「戻した」ときの対が (a,b)-基礎対になるようなものを取り扱いたくなる. しかし, ただ闇雲に (-1)-曲線を潰していくだけでは, 一般に因子 E_X を M 上に「戻す」操作がよく分からない. そこで この射 $M \to X$ をある種の分かりやすい射の合成に「分割」して, 因子 E_X を数段階の分かりやすいプロセスで M 上に戻せられたらいいじゃないか, という発想に到達する. つまり, M から, 以下の双有理射たちを構成する:

$$M = M_0 \xrightarrow{\phi_1} M_1 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_m} M_m = X.$$

ここで, 各々の射 $\phi_i \colon M_{i-1} \to M_i$ は (-1)-曲線の潰し方が「分かりやすい」ものとなっていて, 更に X は $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$ となっている. 要するに, 「セーブポイント」を何箇所か設ける, ということである.

以下, もう少し射 ϕ_i の構成を詳しく見る. $M = M_0$ 上の因子 E_0 及び L_0 を, それぞれ E_M 及び L_S の α での引き戻しで与える. このとき $K_{M_0} + L_0$ がネフ (nef) になることが確認できる (命題 2.2). 以下帰納的に, M_{i-1}, E_{i-1} 及び L_{i-1} までが構成されていてかつ $iK_{M_{i-1}} + L_{i-1}$ がネフなるよう取れていたという仮定の下, 射 ϕ_i を構成する. どのように作るのかというと, M_{i-1} からどんどん $(i+1)K_{M_{i-1}} + L_{i-1}$ (の像) と負に交わる (-1)-曲線を (そのような (-1)-曲線が無くなるまで) 潰していき, ϕ_i はその合成で定める. つまり,

$$\phi_i \colon M_{i-1} \to M_i \text{ は } ((i+1)K_{M_{i-1}} + L_{i-1})\text{-極小モデルプログラムのアウトプット}$$

ということに他ならない. E_i 及び L_i を, E_{i-1} 及び L_{i-1} の像として定める. もし $(i+1)K_{M_i} + L_i$ がネフなら, 射 ϕ_{i+1} を作る作業に戻り, そうでないなら $m := i$ とおいてプロセスを終了する. 以上が各 ϕ_i の構成である. 初めの仮定 $1/c \le r(S)$ より, $m \le c-1$ が証明できる. また錐定理 (cone theorem) より, $X := M_m$ は $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$ となっている. 詳しくは命題 2.4 を見て頂きたい.

このように構成した射 ϕ_i がどの程度「分かりやすい」ものであるかを以下に述べる. $iK_{M_{i-1}} + L_{i-1}$ がネフであることと $((i+1)K_{M_{i-1}} + L_{i-1})$-極小モデルプログラムで ϕ_i が得られていたということから, 潰れる (-1)-曲線と L_{i-1} (の像) 等との交点数がはっきりしている. 特に,

$$\begin{aligned} iK_{M_{i-1}} + L_{i-1} &= \phi_i^*(iK_{M_i} + L_i), \\ E_{i-1} &= \phi_i^* E_i - (a - ib)K_{M_{i-1}/M_i} \end{aligned}$$

が成立することが確かめられる. ここで L_{i-1} はネフなので, 特に $-K_{M_{i-1}}$ は ϕ_i-ネフとなる. 一般に, 非特異代数曲面の間の固有双有理射 $\pi \colon V \to U$ が, もし「$-K_V$ が π-ネフ」という条件を満たしていたなら, その射 π というのは U 上の 0 次元閉部分スキーム $\Delta \subset U$ から完全に復元できる. どのような閉部分スキームなのかは次の 1.3 章でみる. 射

ϕ_i に (1.3 章の意味で) 対応する閉部分スキームを $\Delta_i \subset M_i$ とおこう. (つまり, Δ_i は X "上空" のスキームである.) また, $E_X := E_m$ とかく. 以上のようにして得られた多重組 $(X, E_X; \Delta_1, \dots, \Delta_m)$ を, 「長さ m の (a,b)-基礎多重組」と呼ぶ (詳しくは, 2.2 章を見て頂きたい). 対数的デルペッツォ曲面 S の分類を, このような対象を調べることに帰着させたわけである. 4.1 章も合わせて見ると理解が深まると思う.

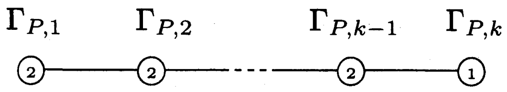
1.3 「分かりやすい」双有理射

以下, 「分かりやすい」双有理射と, 「$(\nu 1)$-条件」という良い条件を満たす 0 次元スキームとの対応を見よう. $(\nu 1)$-条件は, 一見すると分かりづらいように感じるが, 慣れると非常に使い勝手の良い概念である. この章に書かれていることは全て [Nak07, §2] に基づく*6. 以下, U を非特異代数曲面, $\Delta \subset U$ を 0 次元閉部分スキーム, そして対応するイデアル層を $\mathcal{I}_\Delta$ とする. 各点 $P \in \Delta$ に対し,

$$\max\{\nu \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, \mathcal{I}_\Delta \subset \mathfrak{m}_P^\nu\} = 1$$

を満たすとき, Δ は **$(\nu 1)$-条件を満たす**という. ここで $\mathfrak{m}_P$ とは, P を定義する $\mathcal{O}_U$ の極大イデアル層のことである. 更に, Δ の点 P での**重複度** $\mathrm{mult}_P \Delta$ を, アルティン局所環 $\mathcal{O}_{U,P}$ の長さで与え, そして Δ の**次数** $\deg \Delta$ を $\sum_{P \in \Delta} \mathrm{mult}_P \Delta$ で与える.

命題 1.3 ([Nak07, Proposition 2.9]). (1) $\Delta \subset U$ が $(\nu 1)$-条件を満たしているとしよう. 射 $\pi \colon V \to U$ を, Δ に沿った U の爆発 $W \to U$ とその W の極小特異点解消 $V \to W$ との合成で定める (この射 π を, Δ の 0 次元解消 **(elimination)** という). このとき, $-K_V$ は π-ネフである. 更に, 点 $P \in \Delta$ に於いて $\mathrm{mult}_P \Delta = k$ としたとき, 集合論的な意味での $\pi^{-1}(P)$ は, 非特異有理曲線 k 本 $\sum_{i=1}^{k} \Gamma_{P,k}$ より成り, 更にその双対グラフは以下のとおりである :



ここで, 双対グラフの各頂点内の自然数は, 対応する曲線の自己交点数を (-1) 倍した値である*7.

(2) 逆に, 任意の非特異代数曲面の間の固有双有理射 $\pi \colon V \to U$ であって $-K_V$ が π-ネフとなるようなものに対し, $\mathcal{I}_\Delta := \pi_* \mathcal{O}_V(-K_{V/U})$ から定まる U の閉部分スキーム $\Delta \subset U$ は $(\nu 1)$-条件を満たし, 更に射 π は Δ の 0 次元解消と一致する.

---

*6 [Fjt14a, §2.1] も見て頂きたい.

*7 因みに射 $V \to W$ は, 点 P 上空では $\Gamma_{P,1}, \dots, \Gamma_{P,k-1}$ が潰れ, A_{k-1} 型特異点が現れる.

ここで今一度 (ν1)-条件について考え直す. $\Delta \subset U$ が (ν1)-条件を満たし, かつ点 $P \in \Delta$ にて $\mathrm{mult}_P \Delta = k$ だったとしよう. 簡単の為, Δ 上に一点 P しかないとする. このとき, 正則局所環 $\mathcal{O}_{U,P}$ の正則巴系 x, y が存在し, $\mathcal{I}_{\Delta,P} = (x, y^k)$ と書ける. ここで, $U_1 \to U$ を (被約構造を入れた) 点 P に沿った爆発とし, $e \subset U_1$ を例外曲線すると, $\mathcal{I}_\Delta \mathcal{O}_{U_1} = \mathcal{O}_{U_1}(-e) \otimes \mathcal{I}_{\Delta_1}$ かつ, Δ_1 上の点はちょうど一点 (P_1 とかく), と書ける. 更に, 直接的な計算より, $\mathcal{O}_{U_1,P_1}$ のある正則巴系 x_1, y_1 によって $\mathcal{I}_{\Delta_1,P_1} = (x_1, y_1^{k-1})$ と書ける. 次に (被約構造を入れた) 点 P_1 に沿った U_1 の爆発 $U_2 \to U_1$ をとり, 再び $\mathcal{I}_{\Delta_1}$ を $\mathcal{O}_{U_2}$ に持ち上げる. これを k 回繰り返した

$$U_k \to U_{k-1} \to \cdots \to U_1 \to U$$

の合成 $U_k \to U$ こそが実は $\Delta \subset U$ の 0 次元解消と一致する*8. こちらの 0 次元解消の捉え方の方が, 幾何的に理解しやすいと思う.

2 基礎対・基礎多重組

1.2 章で述べた基礎対及び基礎多重組を定義する. この章では, $a > b$ を満たす自然数 a, b を固定する.

2.1 (a,b)-基礎対

対 (M, E_M) が以下の条件 ($\mathcal{B}$1)–($\mathcal{B}$5) を満たすとき, (a,b)-**基礎対** (**(a,b)-basic pair**) であるという:

($\mathcal{B}$1) M は非特異射影有理曲面で, $\mathbb{P}^2$ や $\mathbb{F}_n$ とは同型ではない.

($\mathcal{B}$2) E_M は M 上のゼロでない有効な単純正規交叉因子で, E_M のどの既約成分の係数も $a-1$ 以下の自然数.

($\mathcal{B}$3) M 上の (カルティエ) 因子 L_M ((a,b)-基礎対 (M, E_M) の**基本因子** (**fundamental divisor**) という.) が存在し, $bL_M \sim -aK_M - E_M$ を満たす.

($\mathcal{B}$4) E_M のどの既約成分 E_0 に対しても, $(L_M \cdot E_0) = 0$ が成立.

($\mathcal{B}$5) $K_M + L_M$ はネフで, かつ $(K_M + L_M \cdot L_M) > 0$ が成立.

もし更に以下の条件 ($\mathcal{B}$6), ($\mathcal{B}$7) を満たすならば, (M, E_M) は**正規化された** (a,b)-**基礎対** (**normalized (a,b)-basic pair**) であるという:

($\mathcal{B}$6) a, b を割る任意の自然数 $t \geq 2$ に対し, 少なくとも一つの E_M の既約成分の係数は t で割れない.

*8 [Nak07, Lemma 2.4] を見て頂きたい.

($\mathcal{B}7$) (M, E_M) の基本因子 L_M はこれ以上 $\mathrm{Pic}\,M$ 内で割れない．つまり，自然数 u 及び M 上のカルティエ因子 L' が $L_M \sim uL'$ を満たすならば $u=1$ となる，ということ．

注意 2.1. もし $b/a \geq 1/2$ だと，(a,b)-基礎対及び正規化された (a,b)-基礎対の定義は，[Fjt14a] での定義と変わらない．なぜなら，$b/a \geq 1/2$ なら ($\mathcal{B}7$) の条件は他の条件から自動的に成立してしまうためである[*9]．ただ，[FY14] や [Fjt14b] での a-基礎対 (a-basic pair) の定義と今の $(a,1)$-基礎対の定義は (条件 ($\mathcal{B}1$) の部分が) 微妙に異なる．対 (M, E_M) が，[FY14] や [Fjt14b] の意味での a-基礎対でかつ M がヒルツェブルフ曲面と同型でない，ということと，$(a,1)$-基礎対となる，ということが同値である．

1.2 章で言及したように，この定義は対数的デルペッツォ曲面の極小特異点解消由来で得られた対の重要な性質を抽出したものである．更に，(a,b)-基礎対から対数的デルペッツォ曲面を「復元」できる．これを見よう．

命題 2.2. (1) 対数的デルペッツォ曲面 S が，(a,b) を多重指数として持ち，かつ L_S が S の基本カルティエ因子だったとしよう．$\alpha\colon M \to S$ を S の極小特異点解消，そして $E_M := -aK_{M/S}$ とおくと，対 (M, E_M) は (a,b)-基礎対となり，$\alpha^* L_S$ がその基本因子となる．もし (a,b) が S の正規化された多重指数だったなら，対 (M, E_M) は正規化された (a,b)-基礎対となる．

(2) 対 (M, E_M) を (a,b)-基礎対，L_M をその基本因子とする．このとき，双有理射 $\alpha\colon M \to S$ 及び S 上の豊富なカルティエ因子 L_S が存在し，S は対数的デルペッツォ曲面，$r(S)$ は b/a の自然数倍でかつ 1 未満，$L_M \sim \alpha^* L_S$，そして射 α は S の極小特異点解消となる．もし対 (M, E_M) が正規化された (a,b)-基礎対なら，(a,b) は S の正規化された多重指数となる．

証明. (1) $L_M := \alpha^* L_S$ とかく．対 (M, E_M) が条件 ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}4$) を満たすことは容易にわかるので，以下 ($\mathcal{B}5$) を示そう．まず $K_M + L_M$ がネフであることをいおう．もし $K_M + L_M$ がネフでないとすると，錐定理 [Mor82, Theorem 2.1] より，$(K_M + L_M)$-負な端射線 $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(M)$ が存在．この端射線 R を張る曲線 $\gamma \subset M$ が (-1)-曲線だったなら，$(K_M + L_M \cdot \gamma) < 0$ より $(L_M \cdot \gamma) = 0$，つまり γ は射 α で潰れることになり，α が極小特異点解消だったことに矛盾．よってこの端射線は $\mathbb{P}^1$-束もしくは $\mathbb{P}^2 \to \mathrm{Spec}\,\Bbbk$ なる射を誘導．M は有理曲面ゆえ $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$ と同型となり，(既にチェック済みの) 条件 ($\mathcal{B}1$) に矛盾．よって $K_M + L_M$ はネフであることがわかった．次に $(K_M + L_M \cdot L_M) > 0$ をいおう．もしそうでないとすると，$(K_M + L_M \cdot L_M) = 0$ でなくてはならない．L_M がネフかつ巨大なので，ホッジ指数定理より，$K_M + L_M \equiv 0$．(既にチェック済みの) 条件

[*9] 補題 2.7 や 4.2 章を見て頂きたい．

$(\mathcal{B}3)$ 及び $(\mathcal{B}4)$ より $E_M \equiv (a-b)L_M$ そして $0=(L_M\cdot E_M)=(a-b)(L_M^2)$ となる. $(L_M^2)>0$ かつ $a-b>0$ よりこれは矛盾. よって $(K_M+L_M\cdot L_M)>0$ もわかり, 条件 $(\mathcal{B}5)$ も確認できた. 「正規化された」のくだりもすぐわかる.

(2) これは基底点自由性定理 (base point free theorem) [KM98, Tan12] より従う. 詳しくは, [Fjt14a, Propositions 2.12 and 3.7] を見て頂きたい. □

2.2 (a,b)-基礎多重組

$1\le i\le a-1$ を自然数とする. 組 $(M_i,E_i;\Delta_1,\ldots,\Delta_i)$ が以下の条件 $(\mathcal{F}1)$–$(\mathcal{F}4)$ を満たすとき, **長さ i の (a,b)-擬基礎多重組 ((a,b)-pseudo-fundamental multiplet of length i)** であるという:

- $(\mathcal{F}1)$ M_i は非特異射影有理曲面で, E_i は M_i 上のゼロでない有効因子.
- $(\mathcal{F}2)$ M_i 上の (カルティエ) 因子 L_i ($(M_i,E_i;\Delta_1,\ldots,\Delta_i)$ の**基本因子 (fundamental divisor)** という.) が存在し, $bL_i\sim -aK_{M_i}-E_i$ が成立し, $iK_{M_i}+L_i$ がネフ, そして任意の (-1)-曲線 $\gamma\subset M_i$ に対し $((i+1)K_{M_i}+L_i\cdot\gamma)\ge 0$ が成立.
- $(\mathcal{F}3)$ $\Delta_i\subset M_i$ は 0 次元閉部分スキームで, $(\nu1)$-条件を満たす.
- $(\mathcal{F}4)$ $\phi_i\colon M_{i-1}\to M_i$ を Δ_i の 0 次元解消, $E_{i-1}:=\phi_i^*E_i-(a-ib)K_{M_{i-1}/M_i}$ としたとき, 以下が成立:
  - もし $i=1$ なら, 対 (M_0,E_0) は (a,b)-基礎対.
  - もし $i\ge 2$ なら, 組 $(M_{i-1},E_{i-1};\Delta_1,\ldots,\Delta_{i-1})$ は長さ $i-1$ の (a,b)-擬基礎多重組.

更に, もし $(i+1)K_{M_i}+L_i$ がネフでないなら, この組 $(M_i,E_i;\Delta_1,\ldots,\Delta_i)$ を**長さ i の (a,b)-基礎多重組 ((a,b)-fundamental multiplet of length i)** という. また, 長さ i の (a,b)-基礎多重組 $(M_i,E_i;\Delta_1,\ldots,\Delta_i)$ が, 対応する*10 (a,b)-基礎対 (M_0,E_0) が正規化されているとき, **正規化された (normalized)** 長さ i の (a,b)-基礎多重組 という. 便宜上, (a,b)-基礎対のことを長さ 0 の (a,b)-擬基礎多重組と呼ぶときがある.

注意 2.3. もし $b/a\ge 1/2$ (もしくは, $(a,b)=(2,1)$) だと, [Fjt14a] での (a,b)-基礎三重組 ((a,b)-fundamental triplet) の定義 (もしくは, [Nak07] での基礎三重組 (fundamental triplet) の定義) は, ここでの (a,b)-基礎多重組の定義よりも少し仮定が強い. これは, 与えられた異なる二つの三重組が同じ (a,b)-基礎対を誘導することを避けるべく, 重複を取り除く仮定をつけている為である. また, [FY14] や [Fjt14b] での a-基礎多重組 (a-fundamental multiplet) の定義と, ここでの $(a,1)$-基礎多重組の定義とは, 注意 2.1 で言及した程度の差異しかない. [FY14] では, それぞれ長さ 1, 2 の 3-基礎多重組に (重複

*10 条件 $(\mathcal{F}4)$ から帰納的に得られるもの.

を取り除くべく) 細かい仮定を課した, それぞれ中間三重組 (median triplet), 底四重組 (bottom tetrad) なる対象を分類している*11.

次の命題及び系は, (a,b)-基礎対と (a,b)-基礎多重組を結びつける重要な主張である.

命題 2.4. $(M_i, E_i; \Delta_1, \ldots, \Delta_i)$ を長さ i の (a,b)-擬基礎多重組, また任意の $1 \le j \le i$ に対し, $\phi_j \colon M_{j-1} \to M_j$ を Δ_j の 0 次元解消, $E_{j-1} := \phi_j^* E_j - (a - jb) K_{M_{j-1}/M_j}$, L_{j-1} を $(M_{j-1}, E_{j-1}; \Delta_1, \ldots, \Delta_{j-1})$ の基本因子とする.

(1) $(i+1)K_{M_i} + L_i$ がネフだったとしよう. このとき $i < a/b - 1$ かつ, $iK_{M_i} + L_i$ はネフかつ巨大. 更に, 非特異射影代数曲面の間の双有理射 $\phi_{i+1} \colon M_i \to M_{i+1}$ が存在し, 以下を満たす:
- $(\nu 1)$-条件を満たす 0 次元閉部分スキーム $\Delta_{i+1} \subset M_{i+1}$ が存在し, 射 ϕ_{i+1} は Δ_{i+1} の 0 次元解消に一致する.
- $E_{i+1} := (\phi_{i+1})_* E_i$, $L_{i+1} := (\phi_{i+1})_* L_i$ とおくと, $E_i = \phi_{i+1}^* E_{i+1} - (a - (i+1)b) K_{M_i/M_{i+1}}$ かつ $L_i = \phi_{i+1}^* L_{i+1} - (i+1) K_{M_i/M_{i+1}}$ が成立.
- 組 $(M_{i+1}, E_{i+1}; \Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1})$ は長さ $i+1$ の (a,b)-擬基礎多重組で, L_{i+1} はその基本因子.

(2) $(i+1)K_{M_i} + L_i$ がネフでないとしよう. つまり, $(M_i, E_i; \Delta_1, \ldots, \Delta_i)$ が (a,b)-基礎多重組だったとしよう. このとき M は $\mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{F}_n$ と同型で, そして $((i+1)K_{M_i} + L_i \cdot l) < 0$ となる. ここで l は $M = \mathbb{P}^2$ のときは直線, $M = \mathbb{F}_n$ のときは $\mathbb{P}^1$-束のファイバーとする.

(3) L_i はネフかつ巨大である. 更に, 以下が成立:
- $(L_i \cdot E_i) = \sum_{j=1}^{i} j(a - jb) \deg \Delta_j$.
- $(K_{M_i} + L_i \cdot L_i) - (K_{M_0} + L_0 \cdot L_0) = \sum_{j=1}^{i} j(j-1) \deg \Delta_j$.
- 任意の E_i の非特異な既約成分 C に対し, $(L_i \cdot C) = \sum_{j=1}^{i} j \deg(\Delta_j \cap C^j)$. ここで $C^j \subset M_j$ は C の M_j での固有変換 (proper transform) とする.

証明. 帰納的に, もし $i \ge 1$ なら, L_{i-1} がネフかつ巨大で $L_{i-1} = \phi_i^* L_i - iK_{M_{i-1}/M_i}$, としてよい. なので L_i がネフかつ巨大なのは明らか.

(1) $(i+1)K_{M_i} + L_i$ がネフとする. このとき $a((i+1)K_{M_i} + L_i) \sim -(i+1)E_i + (a - (i+1)b)L_i$ なので, $a - (i+1)b > 0$ つまり $i < a/b - 1$ でなくてはならない. 更に, $(i+1)(iK_{M_i} + L_i) = i((i+1)K_{M_i} + L_i) + L_i$ より, $iK_{M_i} + L_i$ はネフかつ巨大である. 以下, $((i+2)K_{M_i} + L_i)$-極小モデルプログラムを走らせる. つまり, $(i+2)K_{M_i} + L_i$ の像との交点数が負な (-1)-曲線が無くなるまで, そのような曲線をどんどん潰していく. 1.2 章でみたように, 各ステップで $(i+1)K_{M_i} + L_i$ の像と潰れる (-1)-曲線との

*11 この報告集に収録されている [Yas14] も合わせて見て頂きたい.

交点数は 0 となる．なので，この極小モデルプログラムのアウトプット (射の合成) を $\phi_i\colon M_i \to M_{i+1}$ と書くと，$(i+1)K_{M_i} + L_i = \phi_{i+1}^*((i+1)K_{M_{i+1}} + L_{i+1})$ となる．特に $-K_{M_i}$ は ϕ_{i+1}-ネフ．命題 1.3 で見たように，射 ϕ_{i+1} は $(\nu 1)$-条件を満たす閉部分スキーム $\Delta_{i+1} \subset M_{i+1}$ が対応する．$E_i = \phi_{i+1}^* E_{i+1} - (a-(i+1)b)K_{M_i/M_{i+1}}$ かつ $L_i = \phi_{i+1}^* L_{i+1} - (i+1)K_{M_i/M_{i+1}}$ であることや，E_{i+1} がゼロでないことは以上のことからわかる．

(2) 錐定理 [Mor82, Theorem 2.1] より従う．

(3) $\deg \Delta_j = -(K^2_{M_{j-1}/M_j})$ や $\deg(\Delta_j \cap C^j) = (K_{M_{j-1}/M_j} \cdot C^{j-1})$ といった等式*12 からすぐわかる．□

これより直ちに次が従う．

系 2.5. (M, E_M) を (a,b)-基礎対とする．このとき，ある自然数 $1 \le m < a/b$ 及び長さ m の (a,b)-基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ が存在し，$(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ に対応する (a,b)-基礎対は (M, E_M) と同型．

実際に基礎多重組を分類するにあたり，「戻した」対 (M, E_M) が条件 $(\mathcal{B}1)$–$(\mathcal{B}4)$ を満たしているかを $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ の情報から確認するのは容易である．そして，一見すると条件 $(\mathcal{B}5)$「$K_M + L_M$ がネフ」をチェックするのは大変そうに見える．しかし，以下の補題*13 から，実はそのチェックも容易である．

補題 2.6. 自然数 a, b 及び $1 \le i \le a/b$ を固定．X を非特異射影曲面，E, L を X 上の因子で，$bL \sim -aK_X - E$ を満たしつつ $iK_X + L$ がネフとする．また，$(\nu 1)$-条件を満たす 0 次元閉部分スキーム $\Delta \subset X$ とその 0 次元解消 $\phi\colon Y \to X$ が与えられ，$E_Y := \phi^* E - (a - ib)K_{Y/X}$ が有効因子で，更に 因子 $L_Y := \phi^* L - iK_{Y/X}$ が任意の E_Y の既約成分 C に対して $(L_Y \cdot C) \ge 0$ だったとしよう．このとき，任意の $0 \le j \le i$ に対して $jK_Y + L_Y$ はネフである．

証明．ある $0 \le j \le i$ に対し，$jK_Y + L_Y$ がネフでないとしよう．$iK_Y + L_Y = \phi^*(K_X + L)$ ゆえ，$j < i$ でなくてはならない．既約曲線 $B \subset Y$ で $(jK_Y + L_Y \cdot B) < 0$ なるものをとる．このとき，

$$\begin{aligned} 0 &> (a-ib)(jK_Y + L_Y \cdot B) \\ &= (a-jb)(iK_Y + L_Y \cdot B) + (i-j)(E_Y \cdot B) \ge (i-j)(E_Y \cdot B) \end{aligned}$$

なので，B は E_Y の既約成分．よって特に $(L_Y \cdot B) \ge 0$．しかし，

$$0 > i(jK_Y + L_Y \cdot B) = j(iK_Y + L_Y \cdot B) + (i-j)(L_Y \cdot B) \ge 0$$

*12 [Nak07, Lemma 2.7] を見て頂きたい．

*13 [Fjt14b, Proposition 3.13] と本質的に同じ．

となり矛盾．よって任意の $0 \le j \le i$ に対して $jK_Y + L_Y$ はネフ． □

最後に，(a,b)-基礎多重組がいつ正規化されているかを判定するにあたっての簡単な十分条件をみる．

補題 2.7. (a,b)-基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ 及びその基本因子 L_X が以下を満たしていたとする：

(1) a, b を割る任意の自然数 $t \ge 2$ に対し，少なくとも一つの E_X の既約成分の係数は t で割れない．
(2) $r := \max\{t \in \mathbb{Z}_{>0} |$ あるカルティエ因子 L' on X が存在し，$L_X \sim tL'\}$，そして $s := \min\{u | \Delta_u \neq \emptyset\}$ とおいたとき，$\gcd(r, s) = 1$ となる．

このとき $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ は，正規化された (a,b)-基礎多重組である．

証明．仮定 (1) より，条件 $(\mathcal{B}6)$ が成立．条件 $(\mathcal{B}7)$ を確認しよう．(M, E_M) を対応する (a,b)-基礎対とし，L_M を (M, E_M) の基本因子とする．また，$\phi_s \colon M \to M_s$ を Δ_s の 0 次元解消とする．ある $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ 及び M 上のカルティエ因子 L'_M が存在し $L_M \sim tL'_M$ とかけたとしよう．このとき，t は r の約数．更に，$\Gamma \subset M$ を ϕ_s-例外な (-1)-曲線とすると，命題 2.4 より $(L_M \cdot \Gamma) = s$ が成立．つまり t は s の約数でもある．仮定 (2) より，$t = 1$ しかありえない．よって条件 $(\mathcal{B}7)$ が確認できた． □

2.3 長所・短所

以上のアルゴリズムで対数的デルペッツォ曲面を組織的に分類する，というわけだが，このアルゴリズムには長所・短所がある．まず，長所としては，何といっても S の同型類を全て調べ上げることができるという点にある．つまり例えば，物凄く時間がかかるとはいえ (固定された自然数 a に対し) $i(S) = a$ なる任意の対数的デルペッツォ曲面が分類できる．また，基礎対 (M_0, E_0) から

$$M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_m$$

なる列を経て長さ m の基礎多重組 $(M_m, E_m; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ に到達したとすると，M_0 から M_{m-1} までの射は，(M_0, E_0) から一意に決まる．なぜなら，命題 2.4 (1) より，任意の $0 \le i \le m-1$ に対し $iK_{M_i} + L_i$ がネフかつ巨大だからである．つまり，$1 \le i \le m-1$ に対し，M_i は

$$\operatorname{Proj} \sum_{n=0}^{\infty} H^0\left(M_{i-1}, \mathcal{O}_{M_{i-1}}\left(n\left(iK_{M_{i-1}} + L_{i-1}\right)\right)\right)$$

の極小特異点解消に一致する．なので，重複が生じうるのは，$M_{m-1} \to M_m$ のプロセスのみなので，そのステップのみを注意深く議論しておけば，リストの重複を極力避けること

ができる. 実際, [Nak07] や [Fjt14a] では, S の同型類を重複なしで分類することに成功しており, また [FY14] では $mK_{M_m}+L_m$ の小平次元によって重複を組織的に排除する試みがなされている. 更に, このアルゴリズムは, (様々な意味で) 「突飛」な対数的デルペッツォ曲面を調べ上げることに適している. 例えば, [Fjt14b] ではこの方法で, $i(S)=a$ かつ $(-K_S^2)\geq 2a$ なる任意の S を特定することに成功している. 更に, このアルゴリズムの長所としては, (任意標数での) 対数的デルペッツォ曲面の例を作ることに非常に優れていることにある. 実際, 4 章でいくつかの例を簡単に作り出すことに成功している.

では, 短所はというと, アルゴリズムが複雑になってしまうという点にある. 先程 $i(S)=a$ なる任意の対数的デルペッツォ曲面が分類できると主張したが, それは現実的ではない. 「セーブポイント」にあたる中継点を何箇所か経て基礎対を誘導するようなものを考えなくてはならないので, 次の章で述べる $r(S)\geq 1/2$ のときや [FY14] で考えた $i(S)=3$ くらいの中継点が少ない場合でギリギリ (現実的な時間内に) できる, という認識でいる. コンピュータ上でできてしまうようなアルゴリズムに改良できたらいいのだが, 今のところ基礎多重組の中の因子の構造を特定するにあたり良い方法が見いだせていない*14.

3 分数的指数が 1/2 以上のとき

この章では, [Fjt14a] の結果を概説する. つまり, 対数的デルペッツォ曲面 S で $1/2\leq r(S)<1$ なるものを全て分類しようという目的で考察する. S の正規化された多重指数を (a,b) とし, S に対応する正規化された (a,b)-基礎対を (M,E_M), そして正規化された (a,b)-基礎多重組 $(X,E_X;\Delta)$ で対応する (a,b)-基礎対が (M,E_M) となるものを一つとる*15. $\phi\colon M\to X$ を Δ の 0 次元解消とする. 系 2.5 より, (a,b)-基礎多重組の長さは必ず 1 になることに注意する. 更に, L_X を $(X,E_X;\Delta)$ の基本因子とする. 以下, どのようにして $(X,E_X;\Delta)$ の構造を特定するのかを見る. 全部やるのは大変なので, $X=\mathbb{P}^2$ のときのみ考察する. 自然数 e, h を, $\mathcal{O}_X(E_X)\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e)$, $\mathcal{O}_X(L_X)\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(h)$ なるよう定義する. そして $k:=\deg\Delta$ とおく. 条件 $(\mathcal{F}2)$ 及び命題 2.4 (3) の不等式 $(K_X+L_X\cdot L_X)>0$ より, $hb=3a-e$ かつ $h\geq 4$ が成立する. $0<e=3a-hb\leq(6-h)b$ より, $h=4$ または 5 しかありえない. 更に, 命題 2.4 (3) より, $(L_X\cdot E_X)=(a-b)\deg\Delta$, つまり $b/a=(3h-k)/(h^2-k)$ が成立する. ($\phi^*L_X-K_{M/X}$ がネフかつ巨大なので, $h^2-k>0$ に注意.) もし $h=4$ なら, $e>0$ より $b/a<3/4$, そして $b/a=(12-k)/(16-k)$. そして $h=5$ なら, $b/a<3/5$ かつ

---

*14 $r(S)\geq 1/2$ のときは主張 3.2 で言及している.

*15 [Fjt14a] では $(-E_M)$-極小モデルプログラムを, そしてこの報告集では $(2K_M+L_M)$-極小モデルプログラムを走らせて $(X,E_X;\Delta)$ を得ている. 構成が違うように見えるが, プログラムの各ステップを見れば, 両者全く同じ操作であることが分かる.

$b/a = (12-k)/(16-k)$. よって, b/a の可能性は

$$\begin{aligned} h = 4 \text{ なら } & 11/15, 10/14, 9/13, 8/12, 7/11, 6/10, 5/9, 4/8 \\ h = 5 \text{ なら } & 14/24, 13/23, 12/22, 11/21, 10/20 \end{aligned}$$

に絞られる[*16]. つまり, b/a (つまり対応する対数的デルペッツォ曲面 S の分数的指数 $r(S)$) は, $X = \mathbb{P}^2$ のときは有限通りの可能性しかないことが簡単に確認できた. X が $\mathbb{F}_n$ のときも b/a の可能性は上と同様の議論から (各 n に対し) 有限通りしかないことがチェックできる. そして各 b/a の候補に対し, 分数的指数が丁度 b/a となる対数的デルペッツォ曲面 S を (一つだけでよいので) 構成する, といった手順によって, 比較的簡単 (しかしそれなりに大変) に以下は示すことができる:

定理 3.1 ([Fjt14a, Corollary 4.3]). 以下が成立：

$$\mathrm{FS}_2 \cap (1/2, 1) = \left\{ \frac{2s+t}{4s+t} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_{>0},\ t \in \{4, 5, 6\} \right\}.$$

ただ, この章の目的は S の分類であった. 以下, $X = \mathbb{P}^2$ のときどのように E_X の成分を特定するのかについてのみを述べる. というのも, E_X の候補さえ絞られてしまえば, あとは (どこを爆発させるのか, にあたる) Δ の構造については容易に特定できる為である. 以下で述べる方法は, [Fjt14a, §4] の方法を簡略化したものである[*17].

主張 3.2. 任意の E_X の既約成分 C をとる. このとき C は直線もしくは二次曲線. 更に, もし $h=5$ なら C は直線しかありえない.

証明. C の次数を d, そして E_X の C での係数を e_0 とする. 更に $C^M \subset M$ を, C の M での固有変換とする. このとき $e_0 d \le e = 3a - hb$ に注意. (M, E_M) の基本因子 $L_M := \phi^* L_X - K_{M/X}$ と C との交点数は条件 $(\mathcal{B}4)$ より 0 だった. よって $(K_{M/X} \cdot C^M) = hd$. 更に, 種数公式 (genus formula) より, $(C^2) - ((C^M)^2) = (K_{M/X} \cdot C^M) + 2p_a(C) - 2p_a(C^M)$ が成立. C^M は非特異有理曲線なので, $-((C^M)^2) = (h-3)d + 2$ がわかった. 他方, $bL_M \sim -aK_M - E_M$ 及び $(E_M \cdot C^M) \ge e_0((C^M)^2)$ 故に, $2a \ge (a - e_0)(-((C^M)^2))$. これらの式と $1/2 \le b/a$ を, $((C^M)^2)$ 及び e_0 を消去する方向で組み合わせることで, 直ちに $((h-3)d+2)(6-h) \ge 2d^2(h-3)$ が導出される. よって, $h=4$ なら $d=1$ もしくは 2, そして $h=5$ なら $d=1$ がわかった. □

この主張 3.2 により, E_X の構造がかなり限定されることがわかる. 更に, この証明を読んで頂ければわかるように, E_X の既約成分 C での係数についても強い制約がある. なの

---

*16 もちろん, 上記のリストは「ただ値の可能性を絞った」だけで, 実際 b/a は, $h=4$ なら 7/11, 3/5, 5/9, 1/2, そして $h=5$ なら 1/2 しかありえない. [Fjt14a, Claim 4.5] を見て頂きたい.

*17 [Fjt14a] では, 極小特異点解消 $\alpha\colon M \to S$ で潰れる任意の曲線まで考察している.

で, E_X の既約成分の個数も「高が知れている」ので, E_X の構造が完全に特定できるのである. 以下 [Fjt14a] の結果を証明なしで記しておく.

定理 3.3 ([Fjt14a, Theorems 4.1 and 4.2]). 対数的デルペッツォ曲面 S で $r(S) \in [1/2, 1)$ なるものの同型類を全て分類した. ここでの「分類」の意味は, S が対応する正規化された基礎多重組 (に, 重複を除去するため少し条件を増やしたもの) の同型類を全て決定した, の意味である. 実際, ([Nak07] で考察された S たちを除く) S の同型類の集合と上記の意味での正規化された基礎多重組の同型類の集合の間に一対一対応がある.

系 3.4. 対数的デルペッツォ曲面 S が, $r(S) = b/a \in [1/2, 1)$ $(a,\ b \in \mathbb{Z}_{>0})$ と書けたとする. このとき, $-2aK_S$, $-3aK_S$, もしくは $-5aK_S$ のうち少なくとも一つはカルティエ因子となる.

注意 3.5. 因みに, [Fjt14a, Theorem 4.1] の分類の系として, 以下がわかる (敢えて通分していない):

$$\begin{aligned}&\{r(S) \mid S:\ \text{トーリック対数的デルペッツォ曲面}\} \cap (1/2, 1)\\ =&\left\{\frac{2s+t}{4s+t}\ \middle|\ s \in \mathbb{Z}_{>0},\ t \in \{4, 6\}\right\}.\end{aligned}$$

なので, 2 次元ファノ帯域を考える場合, トーリック多様体だけ考えていては足りない.

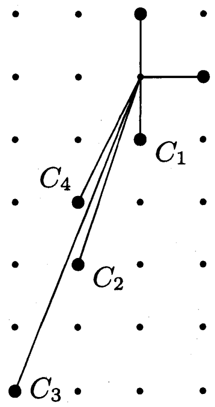
4 例・予想

この章では, 個人的に面白いと思う例及び関連する予想について述べる. トーリック多様体の用語は [Ful93] に従う. この章では, 格子 $N := \mathbb{Z}^{\oplus 2}$ 及び $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を固定して考える.

4.1 $S = \mathbb{P}(1, 2, 5)$ のとき

2 章 (及び 3 章) で詳しく述べたアルゴリズムを理解するために, 対数的デルペッツォ曲面 S が重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1, 2, 5)$ のときどうなるかを見よう. まず, 簡単な計算により, $r(S) = 4/5$ 及び $i(S) = 5$ が分かる. 対応する正規化された $(5, 4)$-基礎対 (M, E_M) はどのような形になるかというと, M は S の極小特異点解消, $E_M = -5K_{M/S}$ だったので, 以下が成立:

> $N_{\mathbb{R}}$ 内の完備扇 Σ で, 1 次元錐の生成元の集合が
> $$\{(1,0), (0,1), (-1,-2), (-2,-5), (-1,-3), (0,-1)\}$$
> となるものに付随するトーリック多様体が M となる.

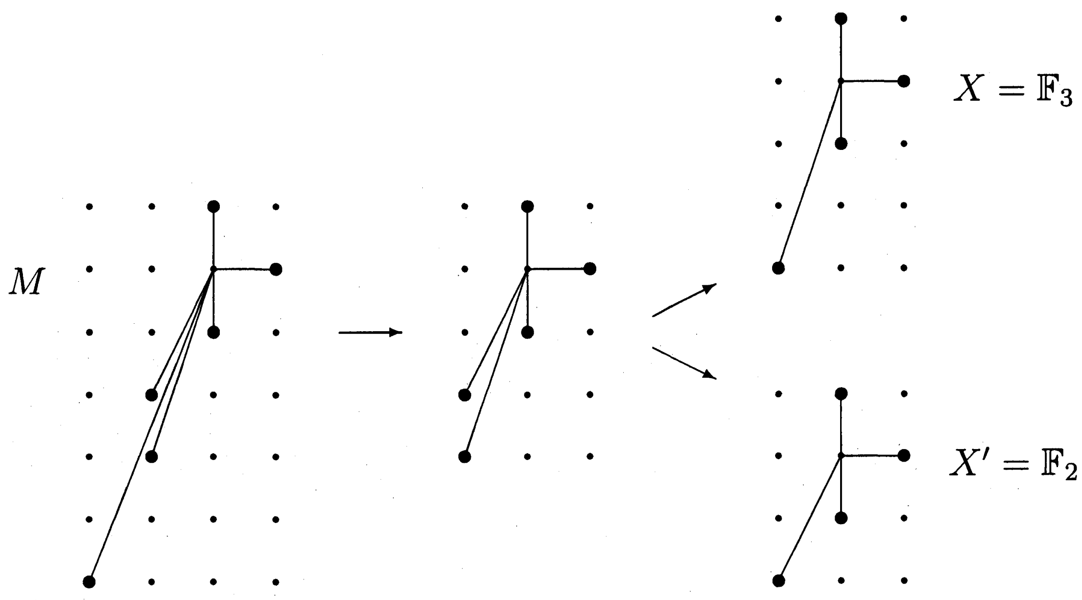


錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}(0,-1)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-3)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(-2,-5)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-2)$ に対応するトーラス不変な M 上の曲線をそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 とおくと, $E_M = 2C_1 + C_2$ となる. 更に, $L_M \sim 2C_1 + 6C_2 + 10C_3 + 5C_4$ も確かめられる.

次に, この (M, E_M) が対応するような正規化された $(5,4)$-基礎多重組はどのような形になるのかを考える. まず, $b/a \geq 1/2$ なので, 系 2.5 より, 必ず基礎多重組の長さは 1 であることに注意する. 1, 2 章で言及したように, $(2K_M + L_M)$-極小モデルプログラムを走らせることで基礎多重組が得られるわけだが,

「C_3 を潰して C_4 を潰す」 と 「C_3 を潰して C_2 を潰す」

という 2 通りの極小モデルプログラムが考えられることに注意する.



それぞれ対応する (正規化された) $(5,4)$-基礎多重組を, $(X, E_X; \Delta)$, $(X', E_{X'}; \Delta')$ とかこう. このとき構成より, 以下が成立:

- $X = \mathbb{F}_3$, $E_X = 2\sigma + l$, $\deg \Delta = 2$, Δ の底集合は一点, そして $\Delta \subset l \setminus \sigma$, ここで σ は (-3)-曲線, l はファイバー.
- $X' = \mathbb{F}_2$, $E_{X'} = 2\sigma'$, $\deg \Delta' = 2$, Δ' の底集合は一点, そして $\deg(\Delta' \cap \sigma') = 1$, ここで σ' は (-2)-曲線.

以上が $S = \mathbb{P}(1,2,5)$ でのアルゴリズムの詳細である. ここで見たように, 二つの異なる $(5,4)$-基礎多重組が同じ $(5,4)$-基礎対を誘導している. これは $K_M + L_M$ の小平次元が 1 であることに起因している. しかしながら, これら二つの基礎多重組は, 高々ヒルツェブルフ曲面の基本変換 (elementary transform) の差異しかない. 実際, 射の合成 $M \to X = \mathbb{F}_3 \to \mathbb{P}^1$ 及び $M \to X' = \mathbb{F}_2 \to \mathbb{P}^1$ は, いずれも

$$M \to \operatorname{Proj} \sum_{n=0}^{\infty} H^0\left(M, \mathcal{O}_M\left(n\left(K_M + L_M\right)\right)\right) = \mathbb{P}^1$$

なる射と一致する. (なので, あらかじめこのような重複を未然に防いでおくような仮定を加えておけば, 重複なく分類が可能になる*18.)

4.2 直線の存在しない例

対数的デルペッツォ曲面 S に対し,

$$l(S) := \min\{(-K_S \cdot C) \mid C : \ S \text{ 上の有理曲線 }\}$$

とおく. 更に, 有理曲線 $C \subset S$ が $(L_S \cdot C) = 1$ をみたすとき, C を S 上の**直線 (line)** であるという. ここで L_S は S の基本カルティエ因子とする. つまり, S 上の直線が存在することと $r(S) = l(S)$ が成立することは同値である. さて, [Fjn14, 問題 5.1]*19では, 集合

$$\{l(S) \mid S : \text{対数的デルペッツォ曲面でピカール数 1 のもの }\}$$

が昇鎖列条件をみたすかどうかを言及している. もし任意のピカール数 1 の対数的デルペッツォ曲面上に直線が存在するなら, (少なくとも $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ なら) 1.1 章でみた [Ale88] の結果から昇鎖列条件が示される. 実際, $r(S) \geq 1/2$ なる任意の対数的デルペッツォ曲面 S 上には直線が存在する. なぜなら, $r(S) \geq 1$ のときは事実 1.1 の分類から自明で, $r(S) \in [1/2, 1)$ のときは対応する基礎対から基礎多重組への双有理射で潰れる (-1)-曲線の S での像が正に所望の直線になっている. しかし, 残念ながら一般には常に直線が

*18 [Nak07, Definition 4.3] や [Fjt14a, Definition 3.11 (7)] を見て頂きたい.

*19 この報告集に収録されている. ここでは [Fjn14, 問題 5.1] より少し弱い予想を言及する.

存在するとは限らない．それどころか，$l(S)/r(S)$ はいくらでも大きくなりうる．これが [Fjn14, 問題 5.1] が難しい一つの理由であるように感じる．もしかしたら専門家にとっては自明なのかもしれないが，以下に例を挙げる．

例 4.1. 自然数 $d \geq 2$ を任意にとる．$N_{\mathbb{R}}$ 内の完備扇 Σ で，1 次元錐の生成元の集合が

$$\{(-1,-1),(2d+1,-1),(-1,2d-1)\}$$

となるものを考える．この扇 Σ に付随するトーリック多様体を S とする．このとき S はピカール数 1 の対数的デルペッツォ曲面．更に錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(2d+1,-1)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(-1,2d-1)$ に対応するトーラス不変な S 上の曲線をそれぞれ C_1, C_2, C_3 とおくと，S の基本カルティエ因子 L_S とこれらの曲線との交点数は，簡単な計算から

$$(L_S \cdot C_1) = 2d^2 - 1, \quad (L_S \cdot C_2) = d, \quad (L_S \cdot C_3) = d + 1$$

となる．よって，$l(S)/r(S) = d$ となることがわかった．

注意 4.2. 例 4.1 で与えられた対数的デルペッツォ曲面は，以下で与える長さ $m := \lfloor 2d(d+1)/3 \rfloor$ の正規化された $(2d^2-1,1)$-基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ に対応することが確かめられる：

- $X = \mathbb{P}^2$.
- $E_X = (2d^2 - d - 1)l_1 + (2d^2 - d - 2)l_2$, ここで l_1, l_2 は異なる直線.
- Δ_d, Δ_{d+1} 以外はどの Δ_i も空集合.
- Δ_d, Δ_{d+1} は共に底集合は一点で $\deg \Delta_{d+1} = 2d$, $\deg \Delta_d = 2d + 2$. そして $\Delta_{d+1} \subset l_2 \setminus l_1$ かつ $\Delta_d \subset l_1 \setminus l_2$. ここで l_1, l_2 は，X 上の l_1, l_2 の固有変換.

注意 4.3. 因みに，ピカール数 1 の (高次元) 非特異ファノ多様体上に直線が存在するかどうかは分かっていない．[Tak11, 問題 11] や [Kol96, Problem V.1.13] を見て頂きたい．

4.3 $r(S)$ と $i(S)$ との関係

S を対数的デルペッツォ曲面とする．分数的指数の既約分数表示 $r(S) = b/a$ としたとき，$\mathbb{Q}$-ゴレンシュタイン指数 $i(S)$ は a の倍数である．しかし，注意 1.2 でみたように，一般には a と $i(S)$ は異なる．つまり，$-aK_S$ がカルティエ因子になるとは限らない．ただ，系 3.4 でみたように，もし $r(S) \geq 1/2$ なら，必ず $-30aK_S$ がカルティエ因子になる．この結果から，一瞬「ある自然数 F が存在し，任意の S に対し $-FaK_S$ がカルティエ因子になる」という主張を期待してしまうが，残念ながら以下の例が示しているようにこの主張は正しくない．

例 4.4. $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ を任意にとる. 以下, 長さ $2d$ の正規化された $((36d^2-12d-1)(6d-1),(6d-1)^2)$-基礎多重組 $(X, E_X; \Delta_1, \ldots, \Delta_{2d})$ を, 以下のように定める:

- $X = \mathbb{P}^2$.
- $E_X = 108d^2(2d-1)l_1 + 3(36d^2-6d-1)(2d-1)l_2$, ここで l_1, l_2 は異なる直線.
- $\Delta_2, \ldots, \Delta_{2d} = \emptyset$.
- Δ_1 の底集合は二点 P, Q で, P は l_1 と l_2 の交点で $Q \in l_1 \setminus l_2$.
- $\mathrm{mult}_P \Delta_1 = 6d+1$, $\mathrm{mult}_P(\Delta_1 \cap l_2) = 6d$, $\mathrm{mult}_Q \Delta_1 = 6d$, かつ $\mathrm{mult}_Q(\Delta_1 \cap l_1) = 6d-1$ を満たす.

実際この組は, 補題 2.6 などから基礎多重組になることがわかる. 特に, 対応する基礎対 (M, E_M) の構造については, ([Fjt14a, Examples 2.5 and 2.6] から) M のピカール数は $12d+2$ かつ E_M の既約成分の個数は $12d+1$ もわかる. また補題 2.7 よりこの $((36d^2-12d-1)(6d-1),(6d-1)^2)$-基礎多重組は正規化されている. なので, これに対応する対数的デルペッツォ曲面を S とかくと, S のピカール数は 1 で,

$$r(S) = \frac{6d-1}{36d^2-12d-1}, \quad i(S) = (36d^2-12d-1)(6d-1)$$

が成立する.

この例 4.4 では, $r(S)$ を既約分数表示したときの分母 a と $i(S)$ がいくらでも離れられる, つまり $i(S)/a$ は一般にいくらでも大きくなることを主張している. しかし, 例 4.4 に於いては, $i(S)/a$ が大きくなる例を $r(S)$ がすごく小さいような例で構成している. なので, 以下のような予想を考えたくなる. ここで $\mathbb{C}$ 上の正規射影代数多様体 V が**対数的ファノ多様体 (log Fano variety)** とは, ここでは高々ログ端末特異点しか持たず, かつ反標準因子 $-K_V$ が豊富, という定義とする. 更に, 対数的デルペッツォ曲面のときと同様に, 対数的ファノ多様体 V の分数的指数 $r(V)$ を $\max\{r \in \mathbb{Q}_{>0} \mid -K_V \sim_{\mathbb{Q}} rL\ (^{\exists}L:\ カルティエ因子)\}$ として定める.

予想 4.5. 任意の正の有理数 ε 及び 任意の自然数 n に対しある自然数 F が存在し, $\mathbb{C}$ 上の任意の n 次元対数的ファノ多様体 V で $r(V) \geq \varepsilon$ なるものに対し, $r(V)$ の既約分数表示 $r(V) = b/a$ とかいたとき, $-FaK_V$ はカルティエ因子となる.

系 3.4 によると, $\varepsilon = 1/2$ かつ $n = 2$ のときは $F = 30$ ととれる. 一般の場合は難しそうに感じる. しかし, この種の予想は, 対数的ファノ多様体の分数的指数と $\mathbb{Q}$-ゴレンシュタイン指数をつなぐ重要な問題だと思う. 分数的指数は, 主として非特異な場合に盛んに研究されている大域的性質, そして $\mathbb{Q}$-ゴレンシュタイン指数は多様体の特異点の様子を知るにあたり使い勝手の良い局所的性質*20であるように感じる. 両者の関連を見出すこ

*20 例えば, [FY14, §2.3] を見て頂きたい

とができるならば, 対数的ファノ多様体の理解が飛躍的に進むと思う.

謝辞

RIMS 研究集会にて講演の機会を下さった松下大介先生に感謝致します. 藤野修先生, 安武和範さんには, 公開前の報告集の原稿 [Fjn14], [Yas14] を送って下さり, またこの原稿に目を通して下さり, かつ貴重な助言を下さいましてありがとうございます. 筆者は日本学術振興会特別研究員として補助を受けています.

参考文献

[Ale88] V. A. Alexeev, *Fractional indices of log del Pezzo surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), no. 6, 1288–1304, 1328; translation in Math. USSR-Izv. **33** (1989), no. 3, 613–629.

[Ale91] V. A. Alexeev, *Theorems about good divisors on log Fano varieties (case of index $r > n-2$)*, Algebraic geometry (Chicago, IL, 1989), 1–9, Lecture Notes in Math., **1479**, Springer, Berlin, 1991.

[AN88] V. A. Alexeev and V. V. Nikulin, *Classification of del Pezzo surfaces with log-terminal singularities of index ≤ 2, involutions on $K3$ surfaces, and reflection groups in Lobachevskiĭ spaces* (Russian), Lectures in mathematics and its applications, Vol. 2, No. 2 (Russian), 51–150, Ross. Akad. Nauk, Inst. Mat. im. Steklova, Moscow, 1988.

[AN89] V. A. Alexeev and V. V. Nikulin, *Classification of del Pezzo surfaces with log-terminal singularities of index ≤ 2 and involutions on $K3$ surfaces* (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR **306** (1989), no. 3, 525–528; translation in Soviet Math. Dokl. **39** (1989), no. 3, 507–511.

[AN06] V. A. Alexeev and V. V. Nikulin, *Del Pezzo and $K3$ surfaces*, MSJ Memoirs, **15**. Math. Soc. of Japan, Tokyo, 2006.

[Bre80] L. Brenton, *On singular complex surfaces with negative canonical bundle, with applications to singular compactifications of $\mathbb{C}^2$ and to 3-dimensional rational singularities*, Math. Ann. **248** (1980), no. 2, 117–124.

[Dem80] M. Demazure, *Surfaces de del Pezzo II–V*, in *Séminaire sur les Singularités des Surfaces* (eds. M. Demazure, H. Pinkham and B. Teïssier), Lecture Notes in Math., **777** (1980), Springer, Berlin, pp. 35–68.

[Fjn14] 藤野修, **ファノ多様体についてのいくつかの問題**, 数理解析研究所講究録に掲載予定.

[Fjt75] T. Fujita, *On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 103–115.

[Fjt14a] K. Fujita, *Log del Pezzo surfaces with not small fractional indices*, arXiv:1401.0988.

[Fjt14b] K. Fujita, *Log del Pezzo surfaces with large volumes*, arXiv:1401.1588.

[Ful93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, **131**. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[FY14] K. Fujita and K. Yasutake, *Classification of log del Pezzo surfaces of index three*, arXiv:1401.1283.

[HMX12] C. D. Hacon, J. M^{c}Kernan and C. Xu, *ACC for log canonical thresholds*, arXiv:1208.4150.

[HW81] F. Hidaka and K-i. Watanabe, *Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor*, Tokyo J. Math. **4** (1981), no. 2, 319–330.

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3, Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Mor82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), no. 1, 133–176.

[Nak07] N. Nakayama, *Classification of log del Pezzo surfaces of index two*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **14** (2007), no. 3, 293–498.

[OT12] H. Ohashi and S. Taki, $K3$ *surfaces and log del Pezzo surfaces of index three*, Manuscripta Math. **139** (2012), no. 3–4, 443–471.

[Tak11] **高木寛通, FANO 多様体の諸問題**, 数理解析研究所講究録 **1731** (2011), 106–126.

[Tan12] H. Tanaka, *The X-method for klt surfaces in positive characteristic*, arXiv:1202.2497.

[Yas14] 安武和範, *Classification of log del Pezzo surfaces of index three*, 数理解析研究所講究録に掲載予定.